

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021 - 2022 год, вариант _____

1. Решите уравнение

$$(x + 1)^3 + (x - 1)^3 = 24x$$

В ответ запишите сумму решений.

- 1)0; 2)6; 3)Нет правильного ответа; 4)9; 5)3.

2. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением

$$\sqrt{10 - 2\sqrt{9} \cdot (5 + \sqrt{4})}$$

- 1)1; 2)5; 3)28; 4)Нет правильного ответа; 5)22.

3. Решите неравенство:

$$|2x^2 - 8x + 16| \geq 16$$

Выберите множество, являющееся решением

- 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; 0]$; $[4; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0]$; $(4; +\infty)$; 5)бесконечно много.

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

Пусть (x, y) – решение системы и всего система имеет n решений. В ответе укажите $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$. Другими словами, в ответе укажите сумму координат всех решений. Например, если у системы два решения: $(1, 2)$ и $(3, 4)$, то в ответе укажите $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

- 1)Нет правильного ответа; 2)3; 3)0; 4)-3; 5)6.

5. Какие остатки может иметь простое число, большее 3, при делении на 8?

Если ответов несколько, в ответе укажите их сумму.

- 1)Нет правильного ответа; 2)1; 3)9; 4)16; 5)28.

6. Даны прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой) и правильный треугольник XYZ. Пусть проведена высота CH, равная 4, а угол HCB равен 30 градусам. Радиус описанной у треугольника XYZ окружности равен 4. Найдите произведение площадей этих треугольников.

- 1)8; 2)24; 3)96; 4)144; 5)Нет правильного ответа.

7. Дан треугольник ABC, $AB=3$, $AC=1,5$. Окружность радиуса 2 проходит через точки A, B и пересекает сторону BC в точке D. Еще одна окружность проходит через точки A, D, C. Найдите радиус второй окружности.

- 1)1,5; 2)0,5; 3)1; 4)2; 5)Нет правильного ответа.

8. Трапеция с основаниями 14 и 30 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

- 1)44; 2)4; 3)22; 4)Неоднозначно определена; 5)Нет правильного ответа.

9. Решите уравнение $\sin(\pi - x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x) = -\frac{1}{4}$. Пусть x_0 – наименьший неотрицательный корень этого уравнения. В качестве ответа выберите $\frac{\pi}{x_0}$.

- 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4)8; 5)Нет правильного ответа.

10. Найдите все значения параметра a , при которых хотя бы 1 решение имеет

$$\begin{cases} a + 3t \leq 48, \\ a + 4t \geq \frac{t^2}{4}, \\ a \leq t. \end{cases}$$

В ответе укажите разницу между максимальным и минимальным подходящими значением a .

- 1)100; 2)64; 3)36; 4)28; 5)Нет правильного ответа.

11. Пусть дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, у которой $a_1 = 4$, а разность равна 3. Вычислите $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{39}} + \sqrt{a_{40}}}$.

- 1)2; 2)3; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5)Нет правильного ответа.

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021 - 2022 год, вариант _____

12. Однажды на Выездной Школе ЭМШ на одной из утренних лекций рядом друг с другом сели два старика ЭМШ: Игорь и Вадим. У них завязался разговор о преемственности поколений, в ходе которого Игорь, любитель посчитать в уме, окинул беглым взглядом аудиторию и заключил, что в ней в данный момент находятся 11 человек, окончивших ЭМШ и преподававших в ней, 7 человек, окончивших экономический факультет МГУ и окончивших ЭМШ, 10 человек, окончивших экономический факультет МГУ и преподававших в ЭМШ. При этом людей, относящихся ко всем трём группам, трое. Игорь также заметил, что преподававших в ЭМШ на 11 больше, чем окончивших экономический факультет МГУ, а окончивших ЭМШ на 15 больше, чем преподававших в ЭМШ. Зная, что в аудитории всего 99 людей, преподававших в ЭМШ или окончивших экономический факультет МГУ, или окончивших ЭМШ, вычислите, сколько людей оканчивали ЭМШ.

- 1) 40; 2) 55; 3) 29; 4) 37; 5) Нет правильного ответа.

13. Имеются два слитка бронзы, в состав которых входят только медь и олово. В первом содержание олова составляет 30%, а во втором 20%. Эти два слитка сплавляли, после чего сплавляли получившийся слиток с 8 килограммами меди. В результате получился слиток с 10% олова. Если бы вместо 8 килограммов меди к изначальным слиткам добавили восьмикилограммовый бронзовый слиток, содержащий 70% олова, то получился бы слиток с 50% олова. Найдите веса изначальных слитков. В качестве ответа укажите величину $2x^2y^2$, где x – вес первого слитка, а y – вес второго слитка.

- 1) 78; 2) 86; 3) 128; 4) 544; 5) Нет правильного ответа.

14. На заводе одной известной яблочной компании есть робот, который может производить микросхемы двух типов: А и В. Для производства детали каждого типа робот затрачивает какое-то натуральное число элементарных операций (для каждого типа – своё). Известно, что на производство одной детали А и семи деталей В роботу потребуется суммарно 196 операций. Если бы робот изготовил только детали типа А, причем в количестве, равном числу операций, которое он тратит на производство одной детали типа В, то у него на это ушло бы более 1365 операций. Найдите, сколько операций робот затрачивает на производство одной детали типа В.

- 1) 14; 2) 11; 3) 16; 4) 7; 5) Нет правильного ответа.

15. На одном из математических курсов ЭМШ преподают два друга: Эдик ведет лекции, а Миша проводит семинары и проверяет домашнее задание. Один раз ребята решили проверить домашнее задание вместе. В какой-то момент после начала проверки Эдику позвонили и ему пришлось оставить Мишу проверять остаток работ в одиночку. В результате время, затраченное на проверку этого домашнего задания, оказалось в 5 раз меньше времени, необходимого Мише на проверку этого домашнего задания им одним. Во сколько раз Эдик затратил бы больше времени, проверяя в одиночку всё задание, по сравнению с тем временем, которое он провёл за совместной с Мишей проверкой?

- 1) 4; 2) 2; 3) 1,25; 4) 3; 5) Нет правильного ответа.

16. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 8xy - 16y^2 = 0$

В ответе укажите количество пар (x, y) , являющихся решениями

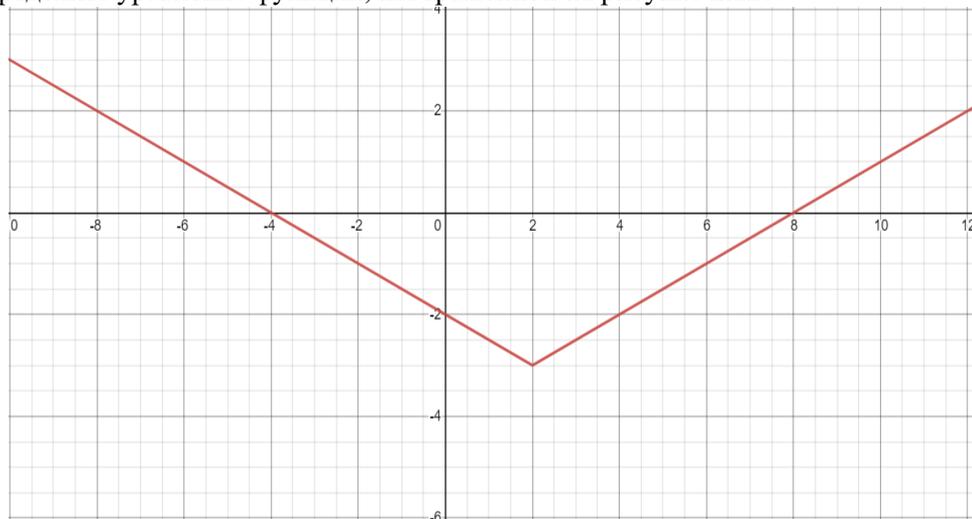
- 1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) Нет правильного ответа.

17. Дано квадратное уравнение $x^2 - \sqrt{7}x + c^2 - 6c + 9 = 0$. Пусть x_1 и x_2 - его корни для некоторого c . Найдите значение выражения:

$$\frac{\sqrt{7}x_1 + \sqrt{7}x_2}{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2(c-3)^2}$$

- 1) 1; 2) 0; 3) $\sqrt{7}$; 4) Невозможно определить; 5) Нет правильного ответа.

18. Определите уравнение функции, изображенной на рисунке ниже:



- 1) $y = \frac{|x+2|}{2} - 3$; 2) $y = \frac{|x-2|}{2} - 3$; 3) $y = 2|x-2| - 3$; 4) $y = 2|x+2| - 3$; 5) Нет правильного ответа.

19. Укажите количество решений уравнения:

$$\sqrt[3]{3x+2} = 5 - x$$

- 1) 0; 2) 1; 3) 7; 4) бесконечно много; 5) Нет правильного ответа.

20. Решите уравнение:

$$x + 3 = \sqrt{12x + 1}$$

В ответе укажите сумму решений.

- 1) -2; 2) 1; 3) 6; 4) 4; 5) Нет правильного ответа.

21. Укажите вариант ответа, в котором перечислены все верные утверждения:

- а) Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника равна 180°
 б) Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис
 в) Точкой пересечения каждая медиана делится в отношении 3:2, считая от вершины

- 1) б; 2) б, в; 3) а, б; 4) а, в; 5) Нет правильного ответа.

22. Посчитайте значение выражения при $a = 5, b = 2, c = -1$:

$$\frac{a^2(\sqrt{b})^4 c^7}{ab}$$

- 1) 10; 2) 1; 3) -5; 4) -10; 5) Нет правильного ответа.

23. Решите неравенство:

$$\frac{(x-5)^4(x-1)}{x+2} \leq 0$$

Выберите множество, являющееся решением.

- 1) $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$; 2) $(-2; 1]$; 3) $(-2; 5]$; 4) $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$; 5) Нет правильного ответа.

24. Первая прямая задается уравнением: $7y + x - 8 = 0$

Вторая прямая задается уравнением: $y - 7x - 9 = 0$

Найдите наименьший угол между прямыми. Ответ дайте в градусах.

- 1) 30; 2) 45; 3) 60; 4) 90; 5) Нет правильного ответа.

25. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств:

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 8 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) 64; 2) 8; 3) 16; 4) 32; 5) Нет правильного ответа.

26. В далёкой-далёкой галактике во времена войн клонов на верфях Куата собирались бронетранспортёры «Джаггернаут НАVw А6». Длиной они были в 69 метров и развивали скорость в 160 км/ч. За сколько секунд этот транспорт обгонит шагоход «АТ-ТЕ», длиной в 41 метр, если скорость второго равна 50 км/ч? Считайте, что бронетранспортёр и шагоход движутся параллельно и в одном направлении, каждый по своей полосе движения, и в процессе обгона бронетранспортер просто проезжает мимо шагохода. Процесс обгона начинается, когда передняя часть бронетранспортера равняется с задней частью шагохода, а завершается, когда задняя часть бронетранспортера равняется с передней частью шагохода.

- 1) 1,3; 2) 2,4; 3) 3,6; 4) 3,8; 5) Нет правильного ответа.

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021 - 2022 год, вариант _____

27. По двум концентрическим окружностям (концентрическими называются окружности, у которых центры совпадают) с центрами в точке O равномерно вращаются две точки A и B . Одна из них совершает полный оборот за 5 секунд быстрее, чем другая, и поэтому за 1 минуту успевает сделать на два оборота больше. Считая, что в начале движения точки находились на одном луче, выходящем из центра окружностей, вычислите величину угла (в градусах) между лучами OA и OB через 1 секунду. Считайте, что одна точка вращается по часовой стрелке, а другая против часовой.

- 1) 60; 2) 12; 3) 36; 4) 24; 5) Нет правильного ответа.

28. Упорядочите по возрастанию следующие числа: $\sqrt{3}$; π ; $\sqrt[4]{27}$.

- 1) $\sqrt{3}$; π ; $\sqrt[4]{27}$ 2) $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{27}$; π 3) $\sqrt[4]{27}$; $\sqrt{3}$; π 4) π ; $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{27}$ 5) Нет правильного ответа.

29. Выпускнику Косте на Летней Школе ЭМШ достался сложный проект. В нем требовалось преобразовать данные, а затем провести их анализ. Костя утверждает, что данные были настолько плохими, что на их преобразование у него ушло 90% от суммарного времени, затраченного на проект. При этом он невзначай добавил, что на сам анализ данных у него ушло 3 часа. Сколько часов он потратил на преобразование данных?

- 1) 20 2) 27 3) 30 4) 45 5) Нет правильного ответа.

30. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого угол BAC равен 30 градусам, угол BCA равен 30 градусам, а сторона BC равна 4. Найдите площадь $ABCD$. В ответе укажите интервал, которому принадлежит найденная величина.

- 1) (11;12); 2) (12;13); 3) (13;14); 4) (14;15); 5) Нет правильного ответа.